数理解析研究所講究録
186巻 1973年 1-14

双曲型混合問題がwell-posedになるための必要条件について

京大 工　梶谷邦彦

§1. 序

混合問題が十分なめらかなdataに対して，一意的に解をもつかという問題に対する研究は，定係数の場合には多くの人々によってなされている。例えば，Hershは[5]において1階systemについてglobalな解の存在を示し，又[6]において高階systemについて解の存在並びに解の有限伝播性について考察しているが，その証明はcompleteなものではなかったように思われる。しかしKasaharaは[8]において解の存在についてcompleteな証明を与え，さらにShirotaは[12]において解の有限伝播に関してさらに詳しい研究を行っている。最近Sakamotoは[11]において高階単独方程式に対する解の存在及び解の有限伝播性についての完全なcharacterizeを行っている。それは，解の存在及び有限伝播が成り立つため必要十分条件は，単にLopatinski determinanteが0にならないだけでなく，それが

t方向に hyperbolic function になることである。すなわち有限伝播が成りたつためには，境界条件の中から parabolic 的な要素を除くことが必要であるという Hersh が [13] において指摘したことを，完全に characterize したものということができる。

さて，上にのべた問題を変係数にした場合にどうなるかというのが本稿の目的である。変係数の場合にこの種の問題はあまりなされていない。十分性に関しては Ikawa が [3] において2次元 Laplacian の oblique な boundary condition をもった問題に関して，解の存在と解の有限伝播を導いている。又，Chazarain [1] 及び Beals [2] は semi-group の理論を用いて Gevrey-Class での解の存在を導いている。必要性に関しては，[7] において analytic な係数をもった 2×2 system に対して，$\mathcal{E}$-well posed であるためには Lopatinski 条件が必要であることを示している。

ここでの目的は [7] の結果を一般の system に拡張することである。すなわち，与えられた方程式系がなめらかな解をもちかつ有限伝播をもつならば，ある条件の下で，方程式系の pricipal part から成る Lopatinski determinante は 0 にならない。この問題は，Cauchy 問題の場合に，Lax [9] 及び Mizohata [10] が示したように，与えられた方程式系の Cauchy

問題がなめらかなdataに対して，解をもちかつ有限伝播が成り立つならば，方程式系のpricipal partのcharacteristic rootsはすべてrealになるという問題と対応したものと考えてよいであろう。しかし，混合問題がCauchy問題と異なるところは単に解の存在と有限伝播のみからprincipal partに対してLopatinski条件は一般には成りたたないことを注意しておこう。(c.f. [11])。それはLopatinski determinantの中にexpliciteに低階の影響が現われるからである。変係数の場合与えられた問題が$\mathcal{E}$-well posed（解が存在しかつ有限伝播をもつ）ためには単にprincipal partのみならずその低階に対しても条件が必要であると思われるが，それは今のところまったくわかっていない。この問題は混合問題の今後の研究課題の一つとなるであろう。

§2. 問題の設定

次の様な問題を考える。

$$
(2.1)\quad
\begin{cases}
L[u] = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} A_j(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x_j} - B(x,t)\right)u(x,t) = f(x,t) \\
u|_{t=0} = g(x) \\
P(x',t)\,u|_{x_k=0} = h(x',t), \qquad x' = (x_1,\cdots,x_{k-1}).
\end{cases}
$$

ここで，Lの係数及びPは十分なめらかとする。

A_j及びBは$m\times m$ matricesとし，Pは$l\times m$ matrixとする。

仮定として次のものを置く.

[I]. L は hyperbolic である。すなわち $\sum_{j=1}^{k} A_j(x,t)\xi_j$ は実の固有値のみをもつ。又 $A_k(x',0,t)$ は non singular とする。

[II]. $P(x',t)$ の rank は l とし, l は $A_k(x',0,t)$ の負の固有値の数に等しい。

$$M(x',t;\lambda,i\eta) = A_k^{-1}(x',0,t)\left(\lambda - i\sum_{j=1}^{k-1} A_j(x',0,t)\eta_j\right)$$

と置くと, M は $\mathrm{Re}\lambda > 0$, $\eta \in R^{k-1}$ のとき, 仮定[I]より real part が 0 になる固有値をもたず, real part が負になる固有値の数は l に等しい。$E^{\pm}(x',t;\lambda,\eta)$ を M の real part 正(負)の固有値に対応する一般固有ベクトルから成る空間とする。$M^{\pm}$ を M の次のような分解とする。すなわち,

$$M^{\pm}(x',t:\lambda,i\eta) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\pm}} \xi(\xi - M)^{-1}\,d\xi,$$

ここで, $\Gamma_{\pm}$ は M の real part 正(負)の固有値のみを囲む Jordan curve である。

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{+}} (\xi - M)^{-1} A_k^{-1}(x',0,t)(\xi - M^{-})^{-1}\,d\xi$$

とおく。このとき仮定として,

[III] (i) $E^{-}(x',t,\lambda,\eta)$ は固有ベクトルのみで張られている

(ii) $\{E^{-} \cup (\mathrm{Ker}\,P \cap E^{+})\} \cap \Lambda(E^{-} \cap \mathrm{Ker}\,P) = \{0\}$,
かつ $\mathrm{rank}\,\Lambda \geq \dim(E^{-} \cap \mathrm{Ker}\,P)$

$E_0^{\pm} = E^{\pm} \cap \mathrm{Ker}\, \mathbb{P}$, $E_1^{\pm} = E^{\pm} - E_0^{\pm}$ とおくと，[III] の (ii) は次のものと同等である。

(ii)′ Λ は E_0^{-} から E_1^{+} へ1対1 onto である。

注意： 上の条件は $m=2$ の場合は次のものと同等である。

$$(2.2) \qquad E^{-}(x', t; \lambda, 0) \cap \mathrm{Ker}\, \mathbb{P}(x', t) = \{0\}.$$

δ を正の数とする。$\Omega(x_0, t_0) = \{(x,t);\ |x - x_0| \le \delta(t_0 - t),\ t \ge 0,\ x_k \ge 0\}$, $G(x_0', t_0) = \Omega(x_0, t_0) \cap \{x_k = 0\}$，並びに $D(x_0) = \Omega(x_0, t_0) \cap \{t = 0\}$ と表わすことにする。さて，方程式 (2.1) が有限伝播をもつとは，与えられた deta (f, g, h) がそれぞれ $\Omega(x_0, t_0)$, $G(x_0)$ 及び $G(x_0', t_0)$ で 0 であれば (2.1) の解 $u(x,t)$ も $\Omega(x_0, t_0)$ で 0 になることである。

定義，方程式 (2.1) が，適当な compatibility conditions をみたすなめらかな deta (f, g, h) に対して，解をもち，それが有限伝播をもつとき，(2.1) は $\mathcal{E}$- well posed であると呼ぶことにする。

注意，(2.1) が $\mathcal{E}$-well posed ならば，Banach の closed graph Theorem より次の不等式が導びかれる。すなわちある正の整数 s が存在して，$(\Omega_n = \Omega(x_0/n, t_0/n),\ G_n = G(x_0'/n, t_0/n),\ D_n = D(x_0/n))$

$$(2.3) \qquad |u|_{0, \Omega_n} \le C \cdot n^s \{ |L[u]|_{s, \Omega_n} + |u|_{s, D_n} + |\mathbb{P}u|_{s, G_n} \}, \quad (n \ge 1)$$

が成りたつ。$|\cdot|_{s,\Omega}$ は $C^s(\Omega)$ の norm である。

定理．[I], [II] 及び [III] を仮定する。そのとき，(2.1) が $\mathcal{E}$-well posed ならば，境界条件 $P(x',t)$ は次のものをみたす。

(2.4) $\quad \operatorname{Ker} P(x',t) \cap E^-(x',t;\lambda,\eta) = \{0\}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \ \eta \in R^{n-1}.$

注意．[III] の (ii) を仮定しなければ定理の結果はもはやなりたたない。例えば，

$$\begin{cases} L = \dfrac{\partial}{\partial t} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_2} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ P = (0, 1) \end{cases}$$

は $\mathcal{E}$-well posed であるが，(2.4) をみたさない。これは (2.2) をみたさないからである。定係数の場合は (2.1) が $\mathcal{E}$-well posed でありかつ (2.2) をみたすことが，(2.4) が成りたつための必要十分条件である。(C.f. [11]).

§3. 定理の証明．

次の Lemma は IVRIY [4] からヒントを得た。

Lemma 3.1. (2.1) が $\mathcal{E}$-well posed ならば，次の不等式が成りたつ。

$$|u|_{0,\Omega(x_0,t_0)} \leqq \text{const.}\, n^{2s} \Big\{ |\tilde{M}_n u|_{s,\Omega(x_0,t_0)} + |u|_{s,D(x_0)} + |\tilde{P}_n u|_{s,G(x'_0,t_0)} \Big\}. \tag{3.1}$$

ここで，

$$\tilde{M}_n = A_k^{-1}\left(\frac{1}{n}x, \frac{1}{n}t\right)\left\{ n\frac{\partial}{\partial t} - n\sum_{j=1}^{k-1} A_j\left(\frac{1}{n}x, \frac{1}{n}t\right)\frac{\partial}{\partial x_j} - B\left(\frac{1}{n}x, \frac{1}{n}t\right) \right\},$$

$\tilde{P}_n = P(\frac{1}{n}x', \frac{1}{n}t)$, である。
このLemmaは(2.3)から変数変換によって容易に求まる。

さて, 定理の結論(2.4)が成り立たないとする。一般性を失なうことなく, $(x',t)=(0.0)$, λ_0, η_0, $Re\lambda_0>0$ で $E^-(0.0;\lambda_0,\eta_0)\cap \ker P(0.0)\neq\{0\}$ とする。

Tayler展開によって,

$$\tilde{M}_n = n\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-M_0(D)\right)-\sum_{j=1}^{N_1} n^{-j+1}M_j(x,t,D) + O(n^{-N_1}),$$

$$M_0(D)=A_k^{-1}(0.0)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{j=1}^{k-1}A_j(0.0)\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

$$M_j(x,t,D)=\sum_{|\nu|+i=j}x^\nu t^i M_{i\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)+\sum_{|\nu|+i=j-1}x^\nu t^i B_{\nu i},$$

又, $$\tilde{P}_n = P_0 + \sum_{j=1}^{N_2-1} n^{-j}P_j(x',t) + O(n^{-N_2})$$

$$P_0=P(0.0), \qquad P_j(x',t)=\sum_{|\nu|+i=j}x'^\nu t^i P_{i\nu}$$

とかける。

$$M^0 = A_k^{-1}(0.0)\left(\lambda_0 - i\sum_{j=1}^{k-1}A_j(0.0)\eta_{j0}\right) \text{ とおく.}$$

$$\left(\eta_0=(\eta_{10},\cdots,\eta_{k-1\,0})\right)$$

M^0の固有値をξ_j $(j=1.2,\cdots,l)$とし$(Re\,\xi_j<0)$, それに対応する固有ベクトルをh_jとする。簡単のためξ_j $(j=1\cdots,l)$は相異な

るとする。 $\widetilde{M}_n$ と $\widetilde{P}_n$ に対して次の形のぜんきん解を求める。

$$(3.2)\qquad u \sim \sum_j n^{-j} \sum_{p=1}^{l} e^{(\xi_p^- x_k + \lambda_0 t - i x' \eta_0) n}\, u_j^{(p)}(x,t),$$

$$\widetilde{M}_n[u] \sim O(n^{-N})$$

$$\widetilde{P}_n[u] \sim O(n^{-N}).$$

(3.2) に $\widetilde{M}_n$ を作用させると,

$$(3.3)\qquad \widetilde{M}_n[u] = \sum_{p=1}^{l}\Big[n^2(\xi_p^- - M^0)u_0^{(p)} + n\Big\{(\xi_p^- - M^0)u_1^{(p)} + \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} - M_0(D) - M_1(x,t;\lambda_0, i\eta_0)\Big)u_0^{(p)}\Big\} + \cdots$$

$$+ n^{-j+2}\Big\{ (\xi_p^- - M^0)u_j^{(p)} + \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} - M_0(D) - M_1(x,t;\lambda_0, i\eta_0)\Big)u_{j-1}^{(p)}$$

$$- \sum_{\substack{i+s=j \\ s<j-1}} M_i(x,t,\lambda_0, i\eta_0)u_s^{(p)} - \sum_{\substack{i+s=j-1 \\ s<j-1}} M_i(x,t,D)u_s^{(p)} \Big\}$$

$$+ \cdots \Big] e^{(\xi_p^- x_k + \lambda_0 t - i x' \eta_0) n}$$

$$(3.4)\qquad \widetilde{P}_n[u]\Big|_{x_k=0} = \sum_{p=1}^{l} e^{(\lambda_0 t - i x' \eta_0) n}\Big[P_0 u_0^{(p)}\Big|_{x_k=0} +$$

$$n^{-1}\Big\{ P_0 u_1^{(p)} + P_1(x';t)u_0^{(p)}\Big\}_{x_k=0} + \cdots$$

$$+ n^{-j}\Big\{ P_0 u_j^{(p)} + P_1(x';t)u_{j-1}^{(p)} + \sum_{\substack{i+s=j-1 \\ s<j-1}} P_i(x';t)u_s^{(p)}\Big\}_{x_k=0}$$

$$+ \cdots \Big]$$

(3.3), (3.4) において n に関する巾の係数が順次 0 になるように $u_j^{(p)}(x,t)$ をきめてゆく。

まず,

$$(3.5)\quad \begin{cases} (\xi_p^- - M^0)u_0^{(p)} = 0, & p=1,2,\cdots,l \\ \sum_{p=1}^{l} P_0 u_0^{(p)}\Big|_{x_n=0} = 0 \end{cases}$$

となるように $u_0^{(p)}$ $(p=1,2,\cdots,l)$ をきめる。

今 $E^- \cap \mathrm{Ker}\,P_0 = \{\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{l'}\}$ とする。$C=(\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_{l'})$ とおく。(3.5) の第1項より

$$(3.6)\quad u_0^{(p)} = \sigma_0^{(p)}(x,t)h_p^-, \quad (p=1,\cdots,l)$$

を得る。又 (3.5) の2項より

$$(3.7)\quad \sum_{p=1}^{l} u_0^{(p)}\Big|_{x_n=0} = \sum_{p=1}^{l'} \tilde{\sigma}_0^{(p)}(x';t)\rho_p.$$

次に,

$$(3.8)\quad (\xi_p^- - M^0)u_1^{(p)} + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - M_0(D) - M_1(x,t,D)\right)u_0^{(p)} = 0 \qquad p=1,2,\cdots,l$$

$$(3.9)\quad \sum_{p=1}^{l}\left(P_0 u_1^{(p)} + P_1(x',t)u_0^{(p)}\right)\Big|_{x_n=0} = 0$$

となる $u_1^{(p)}$ をさがす。(3.8) をみたす $u_1^{(p)}$ が存在するためには, $(\xi^- - M^0)$ の left null vector を w_p^- とすれば, $u_0^{(p)}$ は

$$w_p^- \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - M_0(D) - M_1\right)u_0^{(p)} = 0$$

をみたさなければならない。上の式に(3.6)を代入すると

(3.10) $\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - a_p(D) - b_p(x,t,D)\right)\sigma_0^{(p)} = 0 \quad (p=1,2,\dots,l)$

をうる。ここで $a_p(D) = \omega_p^- \cdot M(D) h_p^-$,
$b_p(x,t,D) = \omega_p^- M_1(x,t,D) h_p^-$ である。(3.10)の方程式は係数は analytic だから Cauchy-Kowalevski の定理によって, (3.10)をみたす $\sigma_0^{(p)}(x,t)$ は存在する。ゆえに(3.8)の特解を $\mathring{u}_1^{(p)}$ とかけば, 一般解は

(3.11) $u_1^{(p)} = \sigma_1^{(p)} h_p^- + \mathring{u}_1^{(p)}$

とかける。

(3.11)を(3.9)に代入して,

(*) $\sum_{p=1}^{l}\left(P_0 h_p^- \sigma_1^{(p)}(x',0,t) + P_0 \mathring{u}_1^{(p)}\Big|_{x_k=0} + P_1 u_0^{(p)}\Big|_{x_k=0}\right) = 0$

となる $\sigma_1^{(p)}(x',0,t)$ が存在するように $\sigma_0^{(p)}$ の初期値 $\tilde{\sigma}_0^{(p)}(x',t)$ をきめる。

$$H^- = (h_1^-, h_2^-, \dots, h_l^-),$$
$$\sigma_1 = {}^t(\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \dots, \sigma_1^{(l)})$$
$$\tilde{\sigma}_0 = {}^t(\tilde{\sigma}_0^{(1)}, \dots, \tilde{\sigma}_0^{(l)})$$

とかけば,

(3.12) $P_0 H^- \sigma_1 + \sum_{p=1}^{l}\left(P_0 \tilde{u}_1^{(p)} + P_1 u_0^{(p)}\right)\Big|_{x_k=0} = 0$

をうる。

仮定から P_0H^- の rank は $l-l'$ だから，PH^- の left nul-vector を $r_1, r_2, \cdots, r_{l'}$ とすれば，$\left(R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{l'} \end{pmatrix} \right)$ $\mathring{u}_1^{(p)}$ は

$$(3.13) \quad \sum_{p=1}^{l} R\left(P_0 \mathring{u}_1^{(p)} + P_1 u_0^{(p)}\right)\Big|_{x_k=0} = 0$$

をみたさなければならない。上の式を $\tilde{\sigma}_0$ の関係式に直そう。そのために $\mathring{u}_1^{(p)}$ を (3.8) から具体的に求める。

$$Q^{\pm} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\pm} (\xi - M^0)^{-1} d\xi$$

とおくと，$Q^+ (Q^-)$ は $E^+ (E^-)$ の $E^- (E^+)$ にそう projection である。$RP_0 Q^- \mathring{u}_1^{(p)} = 0$ に注意すれば，$Q^+\mathring{u}_1^{(p)}$ を求めればよい。$M^{\pm} = M^0 Q^{\pm}$ とおく。(3.8) に Q^+ を operate して $\mathring{u}_1^{(p)}$ を求めると，$Q^+ u_0^{(p)} = 0$ に注意する。

$$(3.14) \quad Q^+\mathring{u}_1^{(p)} = (\xi_p^- - M^+)^{-1} Q^+ \left(M_0(D) + M_1(x,t,D)\right) u_0^{(p)}$$

をうる。

$$(\xi_p^- - M^+)^{-1} Q^+ = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_+} (\xi_p^- - \xi)^{-1} (\xi - M)^{-1} d\xi$$

に注意すれば (3.14) を (3.13) に代入すると，$\tilde{\sigma}$ についての微分方程式をうる。

$$(3.15) \quad T_0(x',t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\sigma}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} T_j(x',t)\frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\sigma}_0 + S(x',t)\,\tilde{\sigma}_0 = 0$$

ここで

$T_0(0.0) = RP_0\Lambda C$ であり，$T_j(x',t)\ (j=0,1,\cdots,k-1)$，$S(x',t)$ は analytic な $l' \times l'$ matrices である。

$\mathrm{Ker}(RP_0) = E^- \cup (\mathrm{Ker}\, P_0 \wedge E^+)$ に注意すれば仮定[III]の(ii)より，$T_0(0.0)$ は non singular であることは明らかであろう。故に(3.15)をみたす $\tilde{\sigma}_0$ は存在する。従って(*)の特別解を $\mathring{\sigma}_1^{(p)}(x';t)$ とすれば，$\sigma_1^{(p)}(x,t)$ の初期条件として，$\sigma_1(x';0,t) = {}^t(\sigma_1^{(1)}(x';0,t), \cdots, \sigma_1^{(\ell)}(x';0,t)) = \mathring{\sigma}_1(x';t) + \tilde{C}\tilde{\sigma}_1(x';t)$ をとればよい。

以上をまとめると，

$$u_0^{(p)}(x,t) = \sigma_0^{(p)}(x,t)\, h_p^-, \quad p=1,2,\cdots,\ell$$
$$\sum_{p=1}^{\ell} \sigma_0^{(p)}(x';0,t)\, h_p^- = \sum_{p=1}^{\ell'} \rho_p \tilde{\sigma}_0^{(p)}(x';t),$$

ここで，$\sigma_0^{(p)}(x,t)$ は方程式(3.10)をみたすものをとり，その初期条件として $\tilde{\sigma}_0^{(p)}(x';t)$ を方程式(3.15)をみたすものとる。次に $u_1^{(p)}(x,t)$ として，

$$u_1^{(p)}(x,t) = \sigma_1^{(p)}(x,t)\, h_p^- + \mathring{u}_1^{(p)}(x,t), \quad p=1,\cdots,\ell,$$
$$\sum_{p=1}^{\ell} \sigma_1^{(p)}(x';0,t)\, h_p^- = \sum_{p=1}^{\ell} \mathring{\sigma}_1^{(p)}(x';t)\, h_p^- + \sum_{p=1}^{\ell'} \rho_p \tilde{\sigma}_1^{(p)}(x';t)$$

をとる。ここで $\mathring{u}_1^{(p)}(x,t)$ は(3.8)の特解であり，又 $\mathring{\sigma}_1^{(p)}(x';t)$ は(*)の特解である。$\sigma_1^{(p)}$ と $\tilde{\sigma}_1^{(p)}$ は次のstepを進めるための任意函数である。一般に $u_{j-1}^{(p)}(x,t)$ として，

$$u_{j-1}^{(p)}(x,t) = \sigma_{j-1}^{(p)}(x,t)\, h_p^- + \mathring{u}_{j-1}^{(p)}(x,t)$$
$$\sum_{p=1}^{\ell} \sigma_{j-1}^{(p)}(x';0;t) = \sum_{p=1}^{\ell} \mathring{\sigma}_{j-1}^{(p)}(x';t)\, h_p^- + \sum_{p=1}^{\ell'} \rho_p \tilde{\sigma}_{j-1}^{(p)}(x';t)$$

とおいて，(3.3)の n^{-j+2} の係数，(3.4)の n^{-j} の係数が0になるためには，前と同様の考察によって，$\sigma_{j-1}^{(p)}(x,t)$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_p} - a_p(D) - b_p(x,t,D)\right)\sigma_{j-1}^{(p)} = f_{j-1}(x,t), \quad (p=1,\dots,l)$$

かつ，$\tilde{\sigma}_{j-1}^{(p)}(x',t)$ は $\left(\tilde{\sigma}_{j-1}(x',t) = {}^t(\tilde{\sigma}_{j-1}^{(1)} \cdots \tilde{\sigma}_{j-1}^{(l)})\right)$

$$T_0(x',t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\sigma}_{j-1} + \sum_{p=1}^{k-1} T_p(x',t)\frac{\partial}{\partial x_p}\tilde{\sigma}_{j-1} + S(x',t)\tilde{\sigma}_{j-1} = g_j(x',t)$$

をみたせばよい。f_j, g_j は前の step からきまる函数である。

このように順次くりかえすことによって (2.1) の $f=0$, $h=0$ に対するぜん近解を構成することが出来る。こうして得られたぜん近解は，$\mathrm{Re}\,\xi_p^- < 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda_0 > 0$ であることに留意すれば，(3.1)を violate することは明らかであろう。

参考文献

[1]. J. Chazarain ; Problèmes de Cauchy abstraits et application à quelques problèmes mixtes, J. Funct. Analysis 7. 386-446 (1971).

[2] R. Beals: Mixed boundary value problem for non strict hyperbolic equations, Bull. A.M.S. (1972) 520-521.

[3] M. Ikawa : Mixed problem for the wave equation with an oblique derivative boundary condition. Osaka J. Math. 7. (1970) 495-525.

[4]. V. J. IVRIĬ: The Cauchy problem for nonstrict hyperbolic equation. Dokl. Akad. Nauk. 197 (1971) 483-486.

[5] K. Hersh. Mixed problem in several veriables. J. Math. Mech. 12 (1963) 317-334.

[6] R. Hersh. Boundary condition for equations of evolution, Arch. Rational. Mech. Anal. 16 (1964).

[7] K. Kajitani; Sur la condition nécessaire du problème mixte bien posé pour les systèmes hyperboliques à coefficients variables. to appear.

[8]. K. Kasahara; On weak wellposedness of mixed problem for hyperbolic systems. Publ. R.I.M.S. 6 (1971) 503-514.

[9]. P. Lax. Asymptotic solution of oscillatory initial value problems. Duke Math. J. 24 (1957), 627-646.

[10]. S. Mizohata. Some remarks on the Cauchy problem, J. Math. Kyoto. Univ 1 (1961) 109-127.

[11] R. Sakamoto, Hyperbolic mixed problems with constant coefficients. to appear.

[12]. ; Shirota; On propagation speed of hyperbolic mixed boundary conditions. Jour Fac. Sci. Hokkaido Univ 22 (1972), 25-31.

[13] R. Hersh: On surfaces waves, Arch. Rat. Mech. Anal. 9 (1965).